

地球物理学のための球面調和関数ノート

第 1.0 版

吉田 晶樹*

2007 年 12 月 27 日

目次

1	球関数	2
1.1	ルジャンドルの微分方程式	2
1.2	ルジャンドル多項式	3
1.3	ルジャンドル陪関数	3
1.4	球面調和関数	4
1.4.1	球面調和関数	4
1.4.2	球面上での球面調和関数による展開	4
1.4.3	球面調和関数の係数	5
1.4.4	球関数の正規化	6
1.4.5	球面調和関数の直交条件	7
1.4.6	実数球面調和関数	8
1.5	その他	9
1.5.1	ルジャンドル関数の微分に関する漸化式	9
2	ポロイダル場・トロイダル場	9
2.1	ベクトル場の展開	10
2.2	ポロイダル係数・トロイダル係数	12
2.2.1	ポロイダル係数	13
2.2.2	トロイダル係数	15
2.2.3	まとめ	16
2.3	マントル対流のポロイダル場・トロイダル場	17

* 〒237-0061 神奈川県横須賀市夏島町 2 番地 15. (独) 海洋研究開発機構 地球内部ダイナミクス領域. 電話 : 046-867-9814, ファックス : 046-867-9315, 電子メール : myoshida@jamstec.go.jp, ウェブサイト : <http://yoshida-geophys.jp>.

1 球関数

以下では、全球面上で任意の分布を持つ量（ジオイド異常，地震波速度構造，海面の温度分布など）は球面調和関数の重ね合わせによって表現できることを導く．

1.1 ルジャンドルの微分方程式

真空の場合の重力ポテンシャルや，電荷がない場合の電磁気ポテンシャルはラプラス方程式

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (1.1)$$

に従う．

球座標系では，

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi(r, \theta, \phi) = 0 \quad (1.2)$$

となる．変数分離を用いてこの解を

$$\psi(r, \theta, \phi) \equiv R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (1.3)$$

と仮定する．

このとき， $\Phi(\phi)$ についての解は，

$$\Phi(\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi}) \quad (1.4)$$

または

$$\Phi(\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi) \quad (1.5)$$

と書ける．ここで， A_m, B_m, C_m, D_m は係数である．

$\Theta(\theta)$ についての解は，ルジャンドルの微分方程式

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0 \quad (1.6)$$

を満たす． $m=0$ の場合の解を，ルジャンドル多項式と呼び， $P_n(x)$ と書く． $m \neq 0$ の場合の解を，ルジャンドル陪関数 $P_n^m(x)$ と呼ぶ．

θ についての解が

$$P_n^m(x) = P_n^m(\cos \theta) \quad (1.7)$$

とした場合, $R(r)$ についての解は,

$$R(r) \propto r^n \quad (1.8)$$

または,

$$R(r) \propto r^{-n-1} \quad (1.9)$$

と書ける.

結局, ラプラス方程式の解は

$$\psi(r, \theta, \phi) = a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) \left(\frac{r}{a}\right)^{-n-1} \right. \quad (1.10)$$

$$\left. + (\bar{g}_n^m \cos m\phi + \bar{h}_n^m \sin m\phi) \left(\frac{r}{a}\right)^n \right\} P_n^m(\cos \theta) \quad (1.11)$$

と表せる. ここで, $g_n^m, h_n^m, \bar{g}_n^m, \bar{h}_n^m$ は係数である. 解が有限の大きさの球の半径 (a) で規格化されていることに注意する.

1.2 ルジャンドル多項式

ルジャンドルの微分方程式の解は, $m = 0$ の場合, $x = \cos \theta$ として,

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{r=0}^{2r \leq n} (-1)^r \frac{(2n-2r)}{2^n r! (n-r)! (n-2r)!} \cos^{n-2r} \theta \quad (1.12)$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \left\{ 2 \cos n\theta + \frac{1 \cdot n}{1 \cdot (2n-1)} \cos(n-2)\theta \right. \\ \left. + 2 \frac{1 \cdot 3 \cdot n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \dots \right\} \quad (1.13)$$

で定義される. この関数をルジャンドル多項式 (関数) と呼ぶ.

1.3 ルジャンドル陪関数

ルジャンドルの微分方程式の解は, $m \neq 0$ の場合, $x = \cos \theta$ として,

$$P_n^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m} \quad (1.14)$$

で定義される. この関数をルジャンドル陪関数と呼ぶ. n 及び m は正の整数で, $n \geq m$ である. $m = 0$ の場合には, $P_n^0 = P_n$ である.

P_n^m は次の微分方程式を満足する.

$$\frac{d^2 P_n^m}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dP_n^m}{d\theta} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right\} P_n^m = 0 \quad (1.15)$$

詳細は [5, 7] を参考のこと.

1.4 球面調和関数

1.4.1 球面調和関数

球座標におけるラプラス方程式の一般解は

$$\psi(r, \theta, \phi) = a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ \left[g_n^m \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \cos m\phi + \bar{g}_n^m \left(\frac{r}{a} \right)^n \sin m\phi \right] \right. \quad (1.16)$$

$$\left. + \left[h_n^m \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \cos m\phi + \bar{h}_n^m \left(\frac{r}{a} \right)^n \sin m\phi \right] \right\} P_n^m(\cos \theta) \quad (1.17)$$

である。

ここで、 $P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi$ と $P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi$ の $0 \leq m \leq n$ についての線形結合

$$Y_n^m(\theta, \phi) = (C_n^m \cos m\phi + S_n^m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \quad (1.18)$$

を n 次、 m 階の球面調和関数という。ここに C_n^m と S_n^m は係数である。

$$C_n^m \equiv g_n^m \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \cos m\phi + \bar{g}_n^m \left(\frac{r}{a} \right)^n \sin m\phi \quad (1.19)$$

$$S_n^m \equiv h_n^m \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \cos m\phi + \bar{h}_n^m \left(\frac{r}{a} \right)^n \sin m\phi \quad (1.20)$$

このとき、

$$\psi(r, \theta, \phi) = a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n Y_n^m(\theta, \phi) \quad (1.21)$$

と書ける。

1.4.2 球面上での球面調和関数による展開

一般に単位球面上 ($r = a = 1$) で与えられる関数 $f(\theta, \phi)$ は

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_n^m \cos m\phi + S_n^m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \quad (1.22)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n Y_n^m(\theta, \phi) \quad (1.23)$$

と表される。このとき、

$$C_n^m \equiv g_n^m + \bar{g}_n^m \quad (1.24)$$

$$S_n^m \equiv h_n^m + \bar{h}_n^m \quad (1.25)$$

である。^{*1}

^{*1} 地球電磁気学では、地球磁場のポテンシャルについて、これらの係数をガウス係数と呼ぶ。

1.4.3 球面調和関数の係数

三角関数の直交性の関係を用いて係数 C_n^m と S_n^m を定めることが出来る．まず，

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi \cos m'\phi = \begin{cases} 0 & (m \neq m') \\ \pi & (m = m' \neq 0) \\ 2\pi & (m = m' = 0) \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\phi \sin m'\phi = \begin{cases} 0 & (m \neq m') \\ \pi & (m = m' \neq 0) \\ 2\pi & (m = m' = 0) \end{cases} \quad (1.27)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\phi \cos m'\phi = 0 \quad (1.28)$$

を利用するために，両辺に $\cos m\phi$, $\sin m\phi$ をかけると

$$f(\theta, \phi) \cos m\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_n^m \cos m\phi \cos m\phi + S_n^m \sin m\phi \cos m\phi) P_n^m(\cos \theta) \quad (1.29a)$$

$$f(\theta, \phi) \sin m\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_n^m \cos m\phi \sin m\phi + S_n^m \sin m\phi \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \quad (1.29b)$$

ϕ に対して，0 から 2π まで積分すると

$$\int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) \cos m\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_n^m \cos m\phi \cos m\phi + S_n^m \sin m\phi \cos m\phi) P_n^m(\cos \theta) d\phi \quad (1.30a)$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) \sin m\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_n^m \cos m\phi \sin m\phi + S_n^m \sin m\phi \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) d\phi \quad (1.30b)$$

三角関数の直交性より，

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) \cos m\phi d\phi &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_n^m \cos m\phi \cos m\phi P_n^m(\cos \theta) d\phi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) C_n^m \int_0^{2\pi} \cos m\phi \cos m\phi d\phi \\ &= \epsilon_m \pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) C_n^m \end{aligned} \quad (1.31a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) \sin m\phi d\phi &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n S_n^m \sin m\phi \sin m\phi P_n^m(\cos \theta) d\phi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) S_n^m \int_0^{2\pi} \sin m\phi \sin m\phi d\phi \\ &= \epsilon_m \pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) S_n^m \end{aligned} \quad (1.31b)$$

ここで,

$$\epsilon_m = \begin{cases} 2 & (m = 0) \\ 1 & (m = 1, 2, 3, \dots) \end{cases} \quad (1.32)$$

従って,

$$\begin{pmatrix} C_n^m \\ S_n^m \end{pmatrix} P_n^m(\cos \theta) = \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} d\phi \quad (1.33)$$

両辺に $P_n^m(\cos \theta) \sin \theta$ をかけて, θ について 0 から π まで積分すると,

$$\begin{pmatrix} C_n^m \\ S_n^m \end{pmatrix} \int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta f(\theta, \phi) P_n^m(\cos \theta) \quad (1.34)$$

ここで, ルジャンドル陪関数の直交性

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_l^m(x) dx = 0 \quad (l \neq n) \quad (1.35)$$

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (1.36)$$

さらに, $x = \cos \theta$, $dx = -\sin \theta d\theta$ として,

$$\int_0^\pi [P_n^m(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (1.37)$$

の関係を用いると

$$\begin{pmatrix} C_n^m \\ S_n^m \end{pmatrix} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} = \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta f(\theta, \phi) P_n^m(\cos \theta) \quad (1.38)$$

よって,

$$\begin{pmatrix} C_n^m \\ S_n^m \end{pmatrix} = \frac{2n+1}{2\epsilon_m \pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta f(\theta, \phi) P_n^m(\cos \theta) \quad (1.39)$$

こうして, $f(\theta, \phi)$ が与えられれば, 球面調和関数の係数 C_n^m と S_n^m が求まる.

1.4.4 球関数の正規化

n や m が大きい値であると, P_n^m も大きい値になるので, 球関数の正規化 (normalization) を行って, 適当な値の大きさの P_{nm} とすると便利である.

$$q_{nm} = \sqrt{\frac{2(2n+1)}{\epsilon_m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \quad (1.40)$$

とおき,

$$P_{nm}(\cos \theta) = q_{nm} P_n^m(\cos \theta) \quad (1.41)$$

$$\begin{pmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{pmatrix} = \frac{1}{q_{nm}} \begin{pmatrix} C_n^m \\ S_n^m \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

とすると,

$$\begin{pmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta f(\theta, \phi) P_{nm}(\cos \theta) \quad (1.43)$$

とおける. $q_{n,m}$ を完全正規化球関数 (fully-normalized spherical harmonic function) という.

つまり, 完全正規化されたルジャンドル陪関数 P_{nm}, P_{lm} は,

$$\int_{-1}^1 P_{nm}(x) P_{lm}(x) dx = 2(2 - \delta_{m0}) \delta_{nl} \quad (1.44)$$

$$\int_{-1}^1 [P_{nm}(x)]^2 dx = \frac{4}{\epsilon_m} \quad (1.45)$$

を満たすことになる. ここで,

$$\delta_{m0} = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases} \quad \delta_{nl} = \begin{cases} 1 & (n=l) \\ 0 & (n \neq l) \end{cases} \quad (1.46)$$

完全正規化球関数に代わって,

$$q_{nm} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \quad (1.47)$$

とする流儀もある. これをシュミット球関数 (Schmidt spherical harmonic function) と呼ぶ. このとき,

$$\begin{pmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{pmatrix} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta f(\theta, \phi) P_{nm}(\cos \theta) \quad (1.48)$$

となる.

測地学やマントルダイナミクスでは完全正規化球関数を, 地球電磁気学やコアダイナミクス [4] ではシュミット球関数を用いる.

1.4.5 球面調和関数の直交条件

球面調和関数の直交条件について, より一般的な表記で示す. 球面調和関数は

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_n^m \cos m\phi + S_n^m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \quad (1.49)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_n^m A_n^m(\theta, \phi) + S_n^m B_n^m(\theta, \phi)) \quad (1.50)$$

ここで,

$$A_n^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \quad (1.51a)$$

$$B_n^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi \quad (1.51b)$$

二つの球面調和関数の積を球面上で積分すると,

$$\left\{ \int_S A_n^m(\theta, \phi) A_s^r(\theta, \phi) dS \right\} = 0 \quad (s \neq n \text{ または } r \neq m) \quad (1.52)$$

$$\int_S A_n^m(\theta, \phi) B_s^r(\theta, \phi) dS = 0 \quad (1.53)$$

$$\left\{ \int_S [A_n^m(\theta, \phi)]^2 dS \right\} = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (1.54)$$

1.4.6 実数球面調和関数

以降の記述では慣例に従い, 次数 n はすべて l で表すことにする.

球面調和関数は複素数を用いたとき, 単位球面上 ($r = a = 1$) で与えられる関数 $f(\theta, \phi)$ は

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (1.55)$$

と書ける. このとき, 係数 A_{lm} は,

$$A_l^m = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta f(\theta, \phi) P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{-im\phi} \quad (1.56)$$

このとき, 正規直交化に対応した球面調和関数は,

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (1.57)$$

と表される. m が負の場合は, 正の場合と複素共役の関係にあることに注意.

しかし実空間では実数のみ扱うので, 実数球面調和関数 (real spherical harmonic function) を用いると便利である. 球面調和関数と実数球面調和関数は以下の関係がある.

$$\mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \phi) \equiv \begin{cases} \frac{1}{i\sqrt{2}} (Y_{l,m}(\theta, \phi) - Y_{l,-m}(\theta, \phi)) & (m < 0) \\ Y_{l,m}(\theta, \phi) & (m = 0) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{l,m}(\theta, \phi) + Y_{l,-m}(\theta, \phi)) & (m > 0) \end{cases} \quad (1.58)$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2} K_{l,m} P_{l,m}(\cos \theta) \cos(m\phi) & (m < 0) \\ K_{l,m} P_{l,m}(\cos \theta) & (m = 0) \\ \sqrt{2} K_{l,m} P_{l,m}(\cos \theta) \sin(m\phi) & (m > 0) \end{cases} \quad (1.59)$$

ここで,

$$K_{l,m} = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \quad (1.60)$$

また, オイラーの定理より

$$e^{im\phi} = \cos(m\phi) + i \sin(m\phi) \quad (1.61)$$

$$e^{im\phi} + e^{-im\phi} = 2 \cos(m\phi) \quad (1.62)$$

$$e^{im\phi} - e^{-im\phi} = 2i \sin(m\phi) \quad (1.63)$$

の関係を用いた.

1.5 その他

1.5.1 ルジャンドル関数の微分に関する漸化式

ルジャンドル関数の微分は漸化式を用いるのが便利である.

$$(1-x^2) \frac{dP_l^m(x)}{dx} = (l+1)xP_l^m(x) - (l-m+1)P_{l+1}^m(x) \quad (1.64)$$

$$= (l+m)P_{l-1}^m(x) - lxP_l^m(x) \quad (1.65)$$

$$= \sqrt{1-x^2}P_l^{m+1}(x) - mxP_l^m(x) \quad (1.66)$$

$$= mxP_l^m(x) - (l+m)(l-m+1)\sqrt{1-x^2}P_l^{m-1}(x) \quad (1.67)$$

特に $x = \cos \theta$ のとき,

$$\frac{dP_l^m(\cos \theta)}{d \cos \theta} = \frac{dP_l^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{d \cos \theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{dP_l^m(\cos \theta)}{d\theta} \quad (1.68)$$

であることを利用して

$$\frac{dP_l^m(\cos \theta)}{d\theta} = -\frac{1}{\sin \theta} [(l+1) \cos \theta P_l^m(\cos \theta) - (l-m+1)P_{l+1}^m(\cos \theta)] \quad (1.69)$$

$$= -\frac{1}{\sin \theta} [(l+m)P_{l-1}^m(\cos \theta) - l \cos \theta P_l^m(\cos \theta)] \quad (1.70)$$

$$= -\frac{1}{\sin \theta} [\sqrt{1-\cos^2 \theta} P_l^{m+1}(\cos \theta) - m \cos \theta P_l^m(\cos \theta)] \quad (1.71)$$

$$= -\frac{1}{\sin \theta} [m \cos \theta P_l^m(\cos \theta) - (l+m)(l-m+1)\sqrt{1-\cos^2 \theta} P_l^{m-1}(\cos \theta)] \quad (1.72)$$

2 ポロイダル場・トロイダル場

以下では, 全球面上の任意のベクトル量 (プレート運動などの速度場, 磁場, 電場) がポロイダル場とトロイダル場に分解できることを導く. 以降の記述では慣例に従い, 次数 n はすべて l で表すことにする.

2.1 ベクトル場の展開

ヘルムホルツの分解定理から、任意のベクトル場 $\mathbf{A}$ はソレノイダル部分（発散が 0 の部分） $\mathbf{B}$ と非回転部分（回転が 0 の部分） $\mathbf{C}$ とに分けられることが知られている。すなわち、

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{C} = 0 \quad (2.2)$$

つまり、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{F} \quad (\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{C} = \nabla f \quad (\nabla \times (\nabla f) = 0) \quad (2.4)$$

とすると、

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \quad (2.5)$$

を満たすスカラー f とベクトル $\mathbf{F}$ が存在する。

一般にベクトル場 $\mathbf{A}$ が

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.6)$$

（ソレノイド条件）を満たすとき、

$$\mathbf{A} = \nabla \times \Lambda \mathbf{p} + \Lambda \mathbf{q} \quad (2.7)$$

$$= \nabla \times \nabla \times p \mathbf{e}_r + \nabla \times q \mathbf{e}_r \quad (2.8)$$

と分解することが出来る。ここで

$$\Lambda = \mathbf{e}_r \times \nabla \quad (2.9)$$

で、 p と q はポロイダルスカラー、トロイダルスカラーである [1].

従って、速度場 $\mathbf{u}$ が、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.10)$$

を満たすとき、トロイダル場 $\mathbf{T}$ とポロイダル場 $\mathbf{S}$ に分解することが出来る [2].

$$\mathbf{u} = \mathbf{T} + \mathbf{S} \quad (2.11)$$

$$= \nabla \times T \mathbf{e}_r + \nabla \times \nabla \times S \mathbf{e}_r \quad (2.12)$$

$$= \nabla \times \left(\frac{\Psi}{r} \mathbf{e}_r \right) + \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\Phi}{r} \mathbf{e}_r \right) \quad (2.13)$$

ここで、 T と S 、 Ψ と Φ はスカラー関数。

また、トロイダル場 $\mathbf{T}$ とポロイダル場 $\mathbf{S}$ は以下のようにも書き換えられる。

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \nabla \times T \mathbf{e}_r \\ &= T \nabla \times \mathbf{e}_r + \nabla T \times \mathbf{e}_r \\ &= \nabla T \times \mathbf{e}_r\end{aligned}\tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \nabla \times \nabla \times S \mathbf{e}_r \\ &= \nabla \times (S \nabla \times \mathbf{e}_r + \nabla S \times \mathbf{e}_r) \\ &= \nabla \times (\nabla S \times \mathbf{e}_r)\end{aligned}\tag{2.15}$$

ここで、 $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ を用いた。

トロイダル場 T とポロイダル場 S の成分は、

$$T_r = 0 \quad T_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \quad T_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\tag{2.16}$$

$$S_r = \frac{1}{r^2} L^2 \Phi \quad S_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \quad S_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \phi}\tag{2.17}$$

ここで、

$$L^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\tag{2.18}$$

スカラー関数 Ψ と Φ を

$$\Psi = \sum_{l,m} T_l^m(r) Y_l^m(\theta, \phi)\tag{2.19}$$

$$\Phi = \sum_{l,m} S_l^m(r) Y_l^m(\theta, \phi)\tag{2.20}$$

のように球面調和関数

$$Y_l^m(\theta, \phi) = e^{im\phi} P_l^{|m|}(\cos \theta)\tag{2.21}$$

で展開すると、トロイダル場 $\mathbf{T}$ とポロイダル場 $\mathbf{S}$ は

$$T_r = 0 \quad T_\theta = \frac{T(r)}{r \sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \quad T_\phi = -\frac{T(r)}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\tag{2.22}$$

$$S_r = \frac{l(l+1)}{r^2} S(r) Y_l^m \quad S_\theta = \frac{1}{r} \frac{dS(r)}{dr} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \quad S_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{dS(r)}{dr} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}\tag{2.23}$$

ここで、

$$L^2 Y_l^m = l(l+1) Y_l^m\tag{2.24}$$

すると u の成分は、

$$u_r = T_r + S_r = \frac{S(r)}{r^2} l(l+1) Y_l^m\tag{2.25a}$$

$$u_\theta = T_\theta + S_\theta = \frac{1}{r} T(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{dS(r)}{dr} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta}\tag{2.25b}$$

$$u_\phi = T_\phi + S_\phi = \frac{1}{r} \frac{dS(r)}{dr} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} - \frac{1}{r} T(r) \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta}\tag{2.25c}$$

2.2 ポロイダル係数・トロイダル係数

$$\mathcal{S}_l^m = \frac{1}{r} \frac{dS(r)}{dr} \quad (2.26)$$

$$\mathcal{T}_l^m = \frac{1}{r} T(r) \quad (2.27)$$

とおく．以下では，係数 $\mathcal{S}_l^m$ と $\mathcal{T}_l^m$ を定める．

u_θ と u_ϕ は，

$$u_\theta = \mathcal{T}_l^m \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} + \mathcal{S}_l^m \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \quad (2.28)$$

$$u_\phi = \mathcal{S}_l^m \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} - \mathcal{T}_l^m \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \quad (2.29)$$

ここで，球面調和関数 Y_l^m を

$$Y_l^m = P_l^m(\cos \theta) \cos m\phi \quad (2.30)$$

とすると，

$$\frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} = -\sin \theta \cos m\phi \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} = -m \sin m\phi P_l^m(\cos \theta) \quad (2.32)$$

よって，

$$u_\theta = \left\{ \mathcal{T}_l^m \frac{1}{\sin \theta} (-m \sin m\phi P_l^m(\cos \theta)) + \mathcal{S}_l^m \left(-\cos m\phi \sin \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (2.33a)$$

$$u_\phi = \left\{ \mathcal{S}_l^m \frac{1}{\sin \theta} (-m \sin m\phi P_l^m(\cos \theta)) - \mathcal{T}_l^m \left(-\cos m\phi \sin \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (2.33b)$$

内を $\sim m\phi$ と $\cos m\phi$ でまとめると，

$$u_\theta = \left\{ \mathcal{T}_l^m \left(-\frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \right) \sin m\phi + \mathcal{S}_l^m \left(-\sin \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \cos m\phi \right\} \quad (2.34a)$$

$$u_\phi = \left\{ \mathcal{S}_l^m \left(-\frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \right) \sin m\phi - \mathcal{T}_l^m \left(-\sin \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \cos m\phi \right\} \quad (2.34b)$$

2.2.1 ポロイダル係数

u_θ と u_ϕ にそれぞれの両辺に $\cos m\phi$ と $\sin m\phi$ をかけると,

$$\int_0^{2\pi} u_\theta \cos m\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \left\{ \mathcal{T}_l^m \left(-\frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \right) \sin m\phi \cos m\phi \right. \\ \left. + \mathcal{S}_l^m \left(-\sin \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \cos m\phi \cos m\phi \right\} d\phi \quad (2.35a)$$

$$\int_0^{2\pi} u_\phi \sin m\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \left\{ \mathcal{S}_l^m \left(-\frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \right) \sin m\phi \sin m\phi \right. \\ \left. - \mathcal{T}_l^m \left(-\sin \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \cos m\phi \sin m\phi \right\} d\phi \quad (2.35b)$$

三角関数の直交性より

$$\int_0^{2\pi} u_\theta \cos m\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \left\{ \mathcal{S}_l^m \left(-\sin \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \cos m\phi \cos m\phi \right\} d\phi \\ = \epsilon_m \pi \mathcal{S}_l^m \left(-\sin \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \quad (2.36a)$$

$$\int_0^{2\pi} u_\phi \sin m\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \left\{ \mathcal{S}_l^m \left(-\frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \right) \sin m\phi \sin m\phi \right\} d\phi \\ = \epsilon_m \pi \mathcal{S}_l^m \left(-\frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \right) \quad (2.36b)$$

従って,

$$-\mathcal{S}_l^m \sin \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_0^{2\pi} u_\theta \cos m\phi d\phi \quad (2.37)$$

$$-\mathcal{S}_l^m \frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) = \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_0^{2\pi} u_\phi \sin m\phi d\phi \quad (2.38)$$

$$(2.39)$$

それぞれに $-\frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \sin \theta$ と $-mP_l^m(\cos \theta) \sin \theta$ をかけると,

$$\mathcal{S}_l^m \sin^2 \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_0^{2\pi} u_\theta \cos m\phi \left(-\frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \sin \theta \right) d\phi \quad (2.40a)$$

$$\mathcal{S}_l^m m^2 P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) = \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_0^{2\pi} u_\phi \sin m\phi \left(-mP_l^m(\cos \theta) \sin \theta \right) d\phi \quad (2.40b)$$

$$(2.40c)$$

それぞれの両辺を θ について 0 から 2π まで積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \mathcal{S}_l^m \sin^2 \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} d\theta &= \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_\theta \cos m\phi \left(-\frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \sin \theta \right) d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_S u_\theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} dS \end{aligned} \quad (2.41a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \mathcal{S}_l^m m^2 P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) d\theta &= \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_\phi \sin m\phi (-m P_l^m(\cos \theta) \sin \theta) d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_S u_\phi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} dS \end{aligned} \quad (2.41b)$$

ここで, ルジャンドル関数の直交性に関する公式 [6]

$$\int_0^\pi \left[\frac{m^2}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right] d\theta = \begin{cases} 0 & (n \neq l) \\ \frac{2(n+m)!}{(n-m)!} \frac{n(n+1)}{2n+1} & (n = l) \end{cases} \quad (2.42)$$

あるいは,

$$\int_0^\pi \left[m^2 P_n^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) + \sin^2 \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right] d\theta = \begin{cases} 0 & (n \neq l) \\ \frac{2(n+m)!}{(n-m)!} \frac{n(n+1)}{2n+1} & (n = l) \end{cases} \quad (2.43)$$

を使って両辺を足すと,

$$\mathcal{S}_l^m \frac{2l(l+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} = \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_S \left(u_\theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \right) dS \quad (2.44)$$

よって,

$$\mathcal{S}_l^m = \frac{2l+1}{2l(l+1)} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_S \left(u_\theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \right) dS \quad (2.45)$$

係数を正規化するために, 完全正規化球数

$$q_{lm} = \sqrt{\frac{2(2l+1)}{\epsilon_m} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \quad (2.46)$$

を使って,

$$Y_{lm}(\cos \theta) = q_{lm} Y_l^m(\cos \theta) \quad (2.47)$$

$$\mathcal{S}_{lm} = \frac{1}{q_{lm}} \mathcal{S}_l^m \quad (2.48)$$

とおくと, 最終的に

$$\mathcal{S}_{lm} = \frac{1}{4\pi l(l+1)} \int_S \left(u_\theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \right) dS \quad (2.49)$$

以上では、球面調和関数は $\cos m\phi$ を使って $Y_l^m = P_l^m(\cos \theta) \cos m\phi$ と定義したが、 $\sin m\phi$ を使って $Y_l^m = P_l^m(\cos \theta) \sin m\phi$ と定義した場合も同様の結果が得られる。それぞれの球面調和関数を

$$\begin{pmatrix} Y_l^{mc} \\ Y_n^{ms} \end{pmatrix} = P_l^m(\cos \theta) \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

のように区別し、正規化したものを Y_{lm}^c と Y_{lm}^s とすると、ポロイダル係数の $\cos$ 項と $\sin$ 項は、

$$\mathcal{S}_{lm}^{cos} = \frac{1}{4\pi l(l+1)} \int_S \left(u_\theta \frac{\partial Y_{lm}^{cos}}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}^{cos}}{\partial \phi} \right) dS \quad (2.51a)$$

$$\mathcal{S}_{lm}^{sin} = \frac{1}{4\pi l(l+1)} \int_S \left(u_\theta \frac{\partial Y_{lm}^{sin}}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}^{sin}}{\partial \phi} \right) dS \quad (2.51b)$$

2.2.2 トロイダル係数

u_θ と u_ϕ にそれぞれの両辺に $\sin m\phi$ と $\cos m\phi$ をかけると、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} u_\theta \sin m\phi d\phi &= \int_0^{2\pi} \left\{ \mathcal{T}_l^m \left(-\frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \right) \sin m\phi \sin m\phi \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{S}_l^m \left(-\sin \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \cos m\phi \sin m\phi \right\} d\phi \end{aligned} \quad (2.52a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} u_\phi \cos m\phi d\phi &= \int_0^{2\pi} \left\{ \mathcal{S}_l^m \left(-\frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \right) \sin m\phi \cos m\phi \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{T}_l^m \left(-\sin \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \cos m\phi \cos m\phi \right\} d\phi \end{aligned} \quad (2.52b)$$

三角関数の直交性より

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} u_\theta \sin m\phi d\phi &= \int_0^{2\pi} \left\{ \mathcal{T}_l^m \left(-\frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \right) \sin m\phi \sin m\phi \right\} d\phi \\ &= \epsilon_m \pi \mathcal{T}_l^m \left(-\frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \right) \end{aligned} \quad (2.53a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} u_\phi \cos m\phi d\phi &= \int_0^{2\pi} \left\{ -\mathcal{T}_l^m \left(-\sin \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \cos m\phi \cos m\phi \right\} d\phi \\ &= -\epsilon_m \pi \mathcal{T}_l^m \left(-\sin \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.53b)$$

従って、

$$\mathcal{T}_l^m \left(-\frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \right) = \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_0^{2\pi} u_\theta \sin m\phi d\phi \quad (2.54a)$$

$$-\mathcal{T}_l^m \left(-\sin \theta \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_0^{2\pi} u_\phi \cos m\phi d\phi \quad (2.54b)$$

それぞれに $-mP_l^m(\cos\theta)\sin\theta$ と $-\frac{\partial P_l^m(\cos\theta)}{\partial\theta}\sin\theta$ をかけると,

$$\mathcal{T}_l^m m^2 P_l^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta) = \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_0^{2\pi} u_\theta \sin m\phi (-mP_l^m(\cos\theta)\sin\theta) d\phi \quad (2.55a)$$

$$-\mathcal{T}_l^m \sin^2\theta \frac{\partial P_l^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \frac{\partial P_l^m(\cos\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_0^{2\pi} u_\phi \cos m\phi \left(-\frac{\partial P_l^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \sin\theta \right) d\phi \quad (2.55b)$$

それぞれの両辺を θ について 0 から 2π まで積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \mathcal{T}_l^m m^2 P_l^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta) d\theta &= \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_\theta \sin m\phi (-mP_l^m(\cos\theta)\sin\theta) d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_S \frac{u_\theta}{\sin\theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial\phi} dS \end{aligned} \quad (2.56a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi -\mathcal{T}_l^m \sin^2\theta \frac{\partial P_l^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \frac{\partial P_l^m(\cos\theta)}{\partial\theta} d\theta &= \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_\phi \cos m\phi \left(-\frac{\partial P_l^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \sin\theta \right) d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_S u_\phi \frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta} dS \end{aligned} \quad (2.56b)$$

ポロイダル係数の場合と同様にルジャンドル関数の直交性に関する公式を使って両辺を引くと,

$$\mathcal{T}_l^m = \frac{(2l+1)(l-m)!}{2l(l+1)(l+m)!} \frac{1}{\epsilon_m \pi} \int_S \left(\frac{u_\theta}{\sin\theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial\phi} - u_\phi \frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta} \right) dS \quad (2.57)$$

正規化を行って,

$$\mathcal{T}_{lm} = \frac{1}{4\pi l(l+1)} \int_S \left(\frac{u_\theta}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{lm}^m}{\partial\phi} - u_\phi \frac{\partial Y_{lm}^m}{\partial\theta} \right) dS \quad (2.58)$$

Y_l^m の $\cos$ 項と $\sin$ 項についてそれぞれ,

$$\mathcal{T}_{lm}^{\cos} = \frac{1}{4\pi l(l+1)} \int_S \left(\frac{u_\theta}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{lm}^{\cos}}{\partial\phi} - u_\phi \frac{\partial Y_{lm}^{\cos}}{\partial\theta} \right) dS \quad (2.59a)$$

$$\mathcal{T}_{lm}^{\sin} = \frac{1}{4\pi l(l+1)} \int_S \left(\frac{u_\theta}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{lm}^{\sin}}{\partial\phi} - u_\phi \frac{\partial Y_{lm}^{\sin}}{\partial\theta} \right) dS \quad (2.59b)$$

2.2.3 まとめ

まとめるとポロイダル係数の $\cos$ 項と $\sin$ 項とトロイダル係数の $\cos$ 項と $\sin$ 項は,

$$\mathcal{S}_{lm}^{\cos} = \frac{1}{4\pi l(l+1)} \int_S \left(u_\theta \frac{\partial Y_{lm}^{\cos}}{\partial\theta} + \frac{u_\phi}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{lm}^{\cos}}{\partial\phi} \right) dS \quad (2.60a)$$

$$\mathcal{S}_{lm}^{\sin} = \frac{1}{4\pi l(l+1)} \int_S \left(u_\theta \frac{\partial Y_{lm}^{\sin}}{\partial\theta} + \frac{u_\phi}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{lm}^{\sin}}{\partial\phi} \right) dS \quad (2.60b)$$

$$\mathcal{T}_{lm}^{\cos} = \frac{1}{4\pi l(l+1)} \int_S \left(\frac{u_\theta}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{lm}^{\cos}}{\partial\phi} - u_\phi \frac{\partial Y_{lm}^{\cos}}{\partial\theta} \right) dS \quad (2.60c)$$

$$\mathcal{T}_{lm}^{\sin} = \frac{1}{4\pi l(l+1)} \int_S \left(\frac{u_\theta}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{lm}^{\sin}}{\partial\phi} - u_\phi \frac{\partial Y_{lm}^{\sin}}{\partial\theta} \right) dS \quad (2.60d)$$

各次数ごとのポロイダル場，トロイダル場のパワースペクトルは以下のように定義できる [3].

$$\sigma_S^2(l) = \sum_{m=0}^l \left(\mathcal{S}_{lm}^{\cos^2} + \mathcal{S}_{lm}^{\sin^2} \right) \quad (2.61a)$$

$$\sigma_T^2(l) = \sum_{m=0}^l \left(\mathcal{T}_{lm}^{\cos^2} + \mathcal{T}_{lm}^{\sin^2} \right) \quad (2.61b)$$

2.3 マントル対流のポロイダル場・トロイダル場

粘性率が空間的に一様な場合のマントル対流の定常速度場を記述する式は，

運動方程式

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \delta \rho g \mathbf{e}_r = 0 \quad (2.62)$$

連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.63)$$

ここで， p は動的圧力， η は粘性率， $\mathbf{v}$ は速度， $\delta \rho$ は密度異常， g は重力加速度， $\mathbf{e}_r$ は r 方向の単位ベクトルである．

連続の式（ソレノイド条件）を満たすとき，トロイダル場 $\mathbf{T}$ とポロイダル場 $\mathbf{S}$ に分解することが出来る [2].

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{T} + \mathbf{S} \\ &= \nabla \times T \mathbf{e}_r + \nabla \times \nabla \times S \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (2.64)$$

運動方程式に回転を施すと，

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla \times \nabla p + \nabla \times \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla \times \delta \rho g \mathbf{e}_r \\ &= \nabla \times \eta \{ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \} + \nabla \times \delta \rho g \mathbf{e}_r \\ &= \nabla \times \eta \{ -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \} + \nabla \times \delta \rho g \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (2.65)$$

となる*2.

トロイダル場 $\mathbf{T}$ とポロイダル場 $\mathbf{S}$ を使って，

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \times [-\eta \nabla \times [\nabla \times (\nabla \times T \mathbf{r})] - \eta \nabla \times [\nabla \times \{ \nabla \times (\nabla \times S \mathbf{r}) \}]] + \nabla \times \delta \rho g \mathbf{e}_r \\ &= \nabla \times \{ \eta \nabla \times (\nabla^2 T \mathbf{e}_r) - \eta \nabla \times \nabla \times (\nabla^2 S \mathbf{e}_r) + \delta \rho g \mathbf{e}_r \} \\ &= \nabla \times \{ \eta \nabla \times (\nabla^2 T \mathbf{e}_r) - \eta \nabla^2 \nabla^2 S \mathbf{e}_r + \delta \rho g \mathbf{e}_r \} \\ &= \nabla \times \{ \eta \nabla \times (\nabla^2 T \mathbf{e}_r) - \eta \nabla^4 S \mathbf{e}_r + \delta \rho g \mathbf{e}_r \} \end{aligned} \quad (2.68)$$

*2 一般に，

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (2.66)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (2.67)$$

であることを使った．

ここで、 $\eta \nabla \times \nabla^2 T \mathbf{r}$ と $\delta \rho g \mathbf{e}_r$ は直交の関係、 $-\eta \nabla^4 S \mathbf{r}$ と $\delta \rho g \mathbf{e}_r$ は平行の関係にあることが分かる。つまり、

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.69)$$

$$\nabla^4 S = \frac{\delta \rho g}{\eta} \quad (2.70)$$

従って、粘性率が空間的に一様な場合のマントル対流の速度場では厳密にポロイダル場のみである。

3 球面調和関数の可視化

図 1 に *Mathematica* を使って可視化した球面調和関数のパターンを紹介する。 $m = 0$ の場合、経度方向にのみ l 本の節がある。 $m \neq 0$ の場合、経度方向に m 本の節、緯度方向に $l - m$ 本の節がある。いずれの場合も、全球面は l 本の節で区分されることが分かる。

付録 A に *Mathematica* のプログラムに載せる。

付録 A *Mathematica* のプログラム

(* Spherical Harmonic Plots by Masaki Yoshida, 2006/02/24 *)

```
ll := 7
```

```
mm := 4
```

```
setPlotPoints3Dsph := 64;
```

```
setPlotPoints3Dbox := 64;
```

```
setPlotPoints2Dbox := 64;
```

```
setViewPoint3Dsph := {0.0, -2.0, 1.5}; (* Default : ViewPoint -> {1.300, \
-2.400, 2.000}, *)
```

```
setViewPoint3Dbox := {1.300, -2.400, 2.000};
```

```
x[theta_, phi_] := Cos[phi] Sin[theta];
```

```
y[theta_, phi_] := Sin[phi] Sin[theta];
```

```
z[theta_, phi_] := Cos[theta];
```

```
xx[r_, theta_, phi_] := r Cos[phi] Sin[theta];
```

```
yy[r_, theta_, phi_] := r Sin[phi] Sin[theta];
```

```
zz[r_, theta_, phi_] := r Cos[theta];
```

```
epsilon[m_] := If[m == 0, 2, 1];
```

```

factorYlm[l_, m_] := Sqrt[(2(2l + 1)(1 - m)!)/(epsilon[m] (1 + m)!));
normYlm[l_, m_, theta_, phi_] := factorYlm[l, m] LegendreP[l, m, Cos[
  theta]] Cos[m phi] ;
maxYlm[l_, m_] := First[NMaximize[normYlm[l, m, theta, phi], {theta, phi}]];
minYlm[l_, m_] := First[NMinimize[normYlm[l, m, theta, phi], {theta, phi}]];
absmaxYlm[l_, m_] := Max[Abs[minYlm[l, m]], Abs[maxYlm[l, m]]];
(*maxnormYlm[l_, m_, theta_, phi_] := normYlm[l, m,
  theta, phi]/maxYlm[l, m]; (* set 0 to 1 for GrayLevel or Hue *)*)
(*maxnormYlmRev[l_, m_, theta_, phi_] := If[maxnormYlm[l, m, theta, phi] < 0, \
0, maxnormYlm[l, m, theta, phi]];*)

(*
(* check *)
For[l1 = 0, l1 ? 4, l1++,
  For[mm = 0, mm ? l1, mm++,
    Array[{Print[l1, " ", mm,
      " ", minYlm[l1, mm], " ", maxYlm[l1, mm], " ", absmaxYlm[l1, mm]] }}
    ]
  ];
(* normYlm[l1, mm, 0.5, 0.5] *)
*)

(* Color    GrayLevel = > 0 : Black, 1 : white *)
(* Note : "ColorFunction" can be used in Plot3D, ListPlot3D,
  DensityPlot, CountourPlot, and Raster *)
color_stripes[f_] := If[f < 0.5, Hue[0.2], Hue[0.8]]; (* negative :
  black(0), positive : white(1) *)

(* Contours on sphere surface by "ParametricPlot3D" *)
plotLegendreP[l_, m_] := Block[{saidai}, saidai = absmaxYlm[l, m];
  ParametricPlot3D[
    {
      x[theta, phi], y[theta, phi], z[theta, phi],
      {EdgeForm[GrayLevel[0.0], Thickness[0.0001]],
      Hue
        [
          ((1.0 - normYlm[l, m, theta, phi])/saidai)*0.4)

```

```

        (* maxnormYlm[l, m, theta, phi] *)
        (* maxnormYlmRev[l, m, theta, phi] *)
    ]
}
},
{phi, 0, 2Pi}, {theta, 0, Pi},
Lighting -> False,
Boxed -> False,
Axes -> None,
PlotPoints -> setPlotPoints3Dsph,
ViewPoint -> setViewPoint3Dsph,
DisplayFunction -> Identity,
(* PlotLabel -> SequenceForm["l=", l, ", m=", m] *)
PlotLabel -> StyleForm[SequenceForm["l = ", l, ", m = ", m],
FontSize -> 20, FontFamily -> "Times"]
]];

(* 3 - D "bumpy" sphere by "ParametricPlot3D" *)
lengLegendreP[l_, m_] := Block[{saidai}, saidai = absmaxYlm[l, m];
ParametricPlot3D[
{
    xx[(normYlm[l, m, theta, phi] + saidai^2), theta,
        phi], (* "+ saidai^2" is arbitrary, but best *)
    yy[(normYlm[l, m, theta, phi] + saidai^2), theta, phi],
    zz[(normYlm[l, m, theta, phi] + saidai^2), theta, phi]
},
{phi, 0, 2Pi}, {theta, 0, Pi},
FaceGrids -> None,
Lighting -> True, (* when "False",
    GlayLevel color
        is automatically selected, i.e. black at large values*)
PlotPoints -> setPlotPoints3Dsph,
(*Mesh -> True, can not be used*)
Boxed -> False,
Axes -> None,
(*
    LightSources ->

```

```

{
  {{0, 0, 1}, RGBColor[0, 1, 0]},
  {{1, 0, 0.4}, RGBColor[1, 0, 0]},
  {{0, 1, 0.4}, RGBColor[0, 0, 1]}
},
*)
ViewPoint -> setViewPoint3Dsph,
DisplayFunction -> Identity,
PlotLabel ->
StyleForm[SequenceForm["l = ", l, ", m = ", m], FontSize -> 20,
FontFamily -> "Times"]
]];

(* 2 - D plain by "DensityPlot" *)
plotplain[l_, m_] := Block[{saidai}, saidai = absmaxYlm[l, m];
  DensityPlot[
    (*normYlm[l, m, theta, phi] ,*)
    ((1.0 - normYlm[l, m, theta, phi]/saidai)*0.4),
    {phi, 0, 2Pi}, {theta, 0, Pi},
    PlotPoints -> setPlotPoints2Dbox,
    (*ColorFunction -> Hue,*)
    Mesh -> False,
    AspectRatio -> 0.5,
    DisplayFunction -> Identity,
    PlotLabel -> StyleForm[SequenceForm["l = ",
    l, ", m = ", m], FontSize -> 20, FontFamily -> "Times"]
  ]
];

(* 3 - D box by "Plot3D" *)
plotthreed[l_, m_] := Plot3D[normYlm[l, m, theta, phi] ,
  {phi, 0, 2Pi}, {theta, 0, Pi},
  Lighting -> True, (* False => gray, True => Color *)
  PlotPoints -> setPlotPoints3Dbox,
  Mesh -> True, (*this is no ploblem*)
  AspectRatio -> 1.0,
  ViewPoint -> setViewPoint3Dbox,

```

```

PlotLabel -> StyleForm[SequenceForm["l = ", l, ", m = ", m], FontSize ->
    20, FontFamily -> "Times"]
];

(* output *)

(* << RealTime3D' *)

lmax := 4;
setImageSize := {800, 250};

(*
For[l1 = 0, l1 ? lmax, l1++,
  For[mm = 0, mm ? l1, mm++,
    Show[GraphicsArray[{
      plotLegendreP[l1, mm],
      lengLegendreP[l1, mm],
      plotplain[l1, mm]}
    ],
    DisplayFunction -> $DisplayFunction,
    ImageSize -> setImageSize]
  ]
];

Show[GraphicsArray[{
  plotLegendreP[7, 0],
  lengLegendreP[7, 0],
  plotplain[7, 0]}],
DisplayFunction -> $DisplayFunction,
ImageSize -> setImageSize];
Show[GraphicsArray[{
  plotLegendreP[7, 4],
  lengLegendreP[7, 4],
  plotplain[7, 4]}],
DisplayFunction -> $DisplayFunction,
ImageSize -> setImageSize];

```

```
Show[GraphicsArray[{
    plotLegendreP[7, 7],
    lengLegendreP[7, 7],
    plotplain[7, 7]}],
DisplayFunction -> $DisplayFunction,
ImageSize -> setImageSize];
```

*)

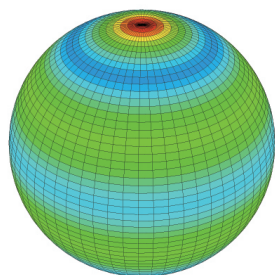
```
Show[GraphicsArray[{
    plotLegendreP[7, 0],
    lengLegendreP[7, 0]}],
DisplayFunction -> $DisplayFunction,
ImageSize -> setImageSize];
Show[GraphicsArray[{
    plotLegendreP[7, 4],
    lengLegendreP[7, 4]}],
DisplayFunction -> $DisplayFunction,
ImageSize -> setImageSize];
Show[GraphicsArray[{
    plotLegendreP[7, 7],
    lengLegendreP[7, 7]}],
DisplayFunction -> $DisplayFunction,
ImageSize -> setImageSize];
```

参考文献

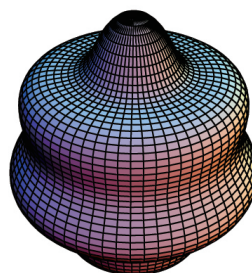
- [1] G. Backus. A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos. *Ann. Phys.*, Vol. 4, pp. 372–447, 1958.
- [2] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*. Dover, U.S.A., 1961.
- [3] B.H. Hager and R.J. O’Connell. Subduction zone dips and flow driven by the plates. *Tectonophysics*, Vol. 50, pp. 111–134, 1978.
- [4] R.T. Merrill, M.W. McElhinny, and P.L. McFadden. *The magnetic field of the Earth: Paleomagnetism, the core, and the deep mantle*, Vol. 63 of *International geophysics series*. Academic Press, U.K., 1998.
- [5] 藪下信. 特殊関数とその応用. 森北出版株式会社, 1975.

- [6] 森口繁一, 宇田川●久, 一松信 (●は, かねへんに圭). 岩波 数学公式 III 特殊函数. 岩波書店, 1987.
- [7] 力武常次, 佐藤良輔, 萩原幸男. 物理数学 I 地球科学を主体として (基礎編). 地球物理シリーズ 02. 学会誌刊行センター, 学会出版センター, 1980.

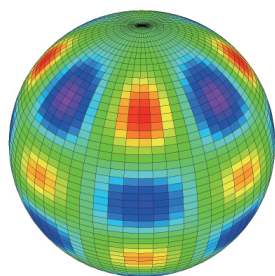
$$l = 7, m = 0$$



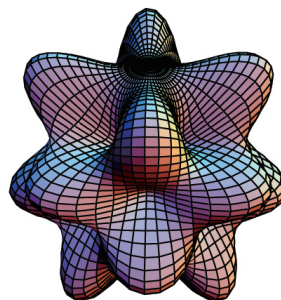
$$l = 7, m = 0$$



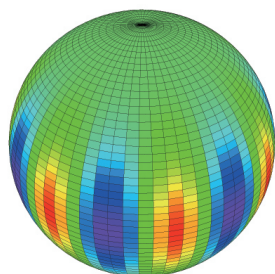
$$l = 7, m = 4$$



$$l = 7, m = 4$$



$$l = 7, m = 7$$



$$l = 7, m = 7$$

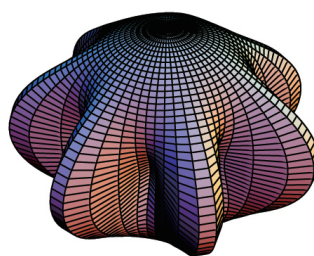


図1 $(l, m) = (7, 0), (7, 4), (7, 7)$ での完全正規化された球面調和関数 Y_{lm} のパターンを (左) 球面上と (右) 凹凸で示した. 文書のサイズ削減のため図の解像度 (300 dpi) を落としている. 高解像度の図または *Mathematica* のプログラムが必要な場合は筆者に連絡のこと.